MAI 3 – úlohy pro cvičení 4 (25.10.2019)

1. Probereme, pokud bude třeba, ještě řešení následujících úloh z domácího úkolu:

   a) Co „znamená“ v prostoru $C[a,b]$ (prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$) s metrikou $d_{\max}(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ konvergence posloupnosti $\{f_n\}$?
   Platí : $\lim f_n = f$ v $C[a,b] \Leftrightarrow \forall x\in[a,b] : \lim f_n(x)=f(x)$?

   b) Promyslete totéž pro prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$ c metrikou
   $$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \; .$$

   c) Promyslete totéž pro prostor (l_∞,d_∞) všech omezených posloupností $x=\{x_n\}$ reálných čísel s metrikou $d(x,y)=\sup\limits_{n\in N}|x_n-y_n|$. Co zde znamená $\lim x^{(k)}=x$?

   d) A také pro prostor (l^2,d_2) posloupností reálných čísel $x=\{x_n\}$, pro které $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ konverguje,
   s metrikou $d_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$.

2. Vlastnosti množin v metrických prostorech:
   (i) Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):
      a) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
      b) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
      c) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
      d) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   (ii) Ukažte, že platí: Z každé omezené posloupnosti $\{a_n\}, a_n\in R^n$ lze vybrat posloupnost konvergentní .
   (iii) Množina $M\subset R^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená v R^n .

3. A úlohy přednášek pana docenta Kalzara:
   z 2. přednášky úlohy 11, 12;
   z 3. přednášky úlohy 1., 3., 4., 5., 6., 7., 9., 11.

4. A třeba něco z úlohy:
   Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout.
   Pokuste se také rozhodnout, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp.uzavřená, omezená, co je hranice zkoumaného definičního oboru.

   $f(x,y)=x+\sqrt{y}$; $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$;

   $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$;

   $f(x,y)=\ln(x+y)$; $f(x,y)=\ln(xy)$; $f(x,y)=\ln(xy-1)$; $f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}$;

   $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(xy)$; $f(x,y)=\log(y-x^2)$; $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x+1}$;

   $f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$;

   $$f(x,y,z)=\frac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)} \; .$$